EL ORDENADOR COMO RECURSO DIDÁCTICO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Liliana Milevicich, Alejandro Lois
Universidad Tecnológica. Facultad Regional General Pacheco. (Argentina)
lmilevicich@ciudad.com.ar, liliana_milevicich@yahoo.com.ar, alelois@ciudad.com.ar
Campo de investigación: resolución de problemas, tecnología avanzada. Nivel educativo: superior
Palabras clave: resolución de problemas, métodos numéricos, procesos iterativos, uso de tecnología

Resumen
Se abordó la resolución de problemas en el ámbito de un curso de cálculo de 1º año utilizando métodos numéricos con el auxilio de un software diseñado en C++ para tales fines.
Las experiencias desarrolladas nos han facilitado obtener conclusiones experimentales acerca de la utilización del ordenador: a) como recurso didáctico y evaluar los modos en que el profesor puede asumir un rol como usuario de medios para enseñar y mostrar; b) como instrumento para el aprendizaje, dónde el estudiante lo emplea para experimentar, conjeturar hipótesis, descubrir regularidades, simular, resolver y obtener conclusiones; c) como instrumento al servicio de la evaluación de las etapas de aprendizaje, con un enfoque no tradicional.

Introducción

Una de las herramientas con las cuales los sujetos pueden lograr una mayor interacción en los diferentes ámbitos educativos, lo es sin dudas el ordenador. Este medio cuenta con determinadas características que lo convierten no sólo en un simple elemento mediador sino en la herramienta más completa creada por el hombre, hasta el momento, para favorecer cualquier proceso de enseñanza-aprendizaje, entre ellos: la rapidez en el procesamiento y presentación de información, una constante y rápida comunicación, además de la interactividad, entre otras.

Tal como lo plantea Torres (1997 y 2001) los ordenadores juegan un papel importante pues con ellas se puede revelar la importancia práctica del conocimiento impartido, trabajar con datos reales en las asignaturas de ciencias, facilitar la labor del alumno en el cumplimiento de las diferentes acciones que conforman la actividad docente, facilitar el tránsito de lo concreto a lo abstracto y viceversa a través de representaciones y las manipulaciones de ellas, lograr una mayor visualización de procesos y fenómenos abstractos, entre otras.

En este sentido, hemos trabajado sobre los modos de encontrar soluciones numéricas a los modelos que dan origen las diferentes situaciones problemáticas.

Desarrollo

La mayoría de las veces la búsqueda de la solución de un problema conduce a la elaboración de un modelo matemático. Si el modelo incluye ecuaciones o sistemas muy sencillos, seguramente el alumno podrá utilizar los algoritmos básicos de resolución. Sin embargo, en la mayoría de los problemas, aún los más sencillos, que se plantean en ingeniería, los alumnos llegan a concebir un modelo que incluyen ecuaciones cúbicas o de orden superior. La resolución algorítmica tradicional suele ser tan engorrosa, debido a que generalmente que se involucran muchos cálculos y procesos iterativos, que se termina por desvirtuar el propósito por el cual se planteó el problema.

Si se tratara de ecuaciones trigonométricas, logarítmicas o exponenciales, éstas admiten el cálculo de sus raíces por métodos algebraicos, pero sólo en algunos casos.

Creemos que, no sin hacer un previo análisis del modelo a resolver, en muchos casos es necesario recurrir a técnicas numéricas. Es aquí donde un software específico puede resultar de mucha utilidad.

En este sentido hemos diseñado una aplicación que permite buscar una o más soluciones aproximadas en un intervalo acotado, utilizando tres métodos, entre los cuales el alumno deberá elegir cuál le resulta más adecuado, según las características del problema. La comparación de resultados en cada caso constituye además, una muy valiosa oportunidad de iniciar el aprendizaje acerca la utilización de procesos iterativos numéricos.

Metodología

La siguiente experiencia fue realizada en el ámbito de primer año de un curso de cálculo con utilización del ordenador como recurso didáctico.

Las actividades propuestas se desarrollaron durante dos clases consecutivas, luego se analizaron las producciones grupales y se realizó la devolución a cada grupo.
Por último, la experiencia concluyó con una puesta en común sobre las bondades y debilidades de cada método utilizado.

Primer problema propuesto, en el cual el docente a cargo de la experiencia tuvo un rol más participativo:

Un silo consiste en una sección principal cilíndrica, con altura 10,5 m y un techo hemisférico. Con el fin de lograr un volumen total de 1700 m^3 (incluyendo la parte interior de la sección del techo). ¿Cuál tendría que ser el diámetro del silo?

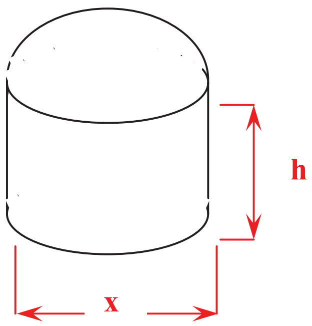


Figura 1

En primer lugar se analizaron los datos (figura1):
Volumen $V = 1700\ m^3$ Altura $h = 10,5\ m$
Y las incógnitas: diámetro x
En segundo lugar se analizaron y plantearon los volúmenes parciales:
Vol. del cilindro = $\pi\ (x/2)^2\ h$ Vol. del techo = $4/6\ \pi\ (x/2)^3$
Finalmente, el volumen total:
$\pi\ (x/2)^2\ h + 4/6\ \pi\ (x/2)^3 = 1700$, con lo cual surgió ácilmente el modelo matemático:

$$y = \pi.\frac{x^2}{4}.h + \frac{2}{3}.\pi.\frac{x^3}{8} - 1700$$

Los alumnos organizados en pequeños grupos discutieron diferentes caminos que permitieran encontrar al menos una raíz real que satisfaga esta ecuación. Al tratarse de una ecuación cúbica con coeficientes no enteros, se plantea un obstáculo salvable mediante el uso de métodos numéricos de cálculo de raíces.

La herramienta desarrollada contempla el cálculo de raíces de una ecuación en una variable de tres maneras diferentes. Al acceder a cada uno de ellos, el usuario debe plantear el modelo y graficar la función en un intervalo por él escogido. Esto les permitió a los alumnos conjeturar acerca de la posible existencia de una raíz en las proximidades de un cierto punto x_o sobre el eje de abscisas.

En el caso del problema planteado, el gráfico permite suponer la existencia de una raíz en las proximidades de x=12 (gráfico 1), dónde además la función cambia de signo.

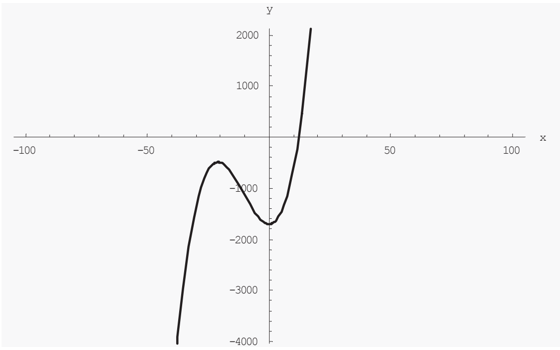


Gráfico 1

$f(x)=\pi/12*x^3 + 8.2467*x^2 - 1700$
en el intervalo [-100,100]

Uno de los métodos utilizados para resolver el problema fue el ideado por Newton. Este es uno de los métodos más eficientes para aproximar las soluciones de la ecuación f(x)=0. A partir de un valor inicial x_0, la aplicación del algoritmo genera una sucesión <xn>, definida por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ para n>= 0.

Cuando ésta converge, se obtienen los resultados con relativa rapidez.

Sin embargo, *algunas veces el método de Newton no converge*. En este sentido los diferentes grupos de trabajo debieron discutir y obtener conclusiones sobre la eficiencia en la aplicación del método en diferentes situaciones tales como: *si no existe raíz real, si la raíz es un punto de inflexión, si el punto inicial corresponde a un máximo o mínimo de la función o si la aproximación inicial está muy lejos de la raíz buscada.*

Luego, con el propósito de lograr un análisis más profundo sobre las ventajas y desventajas del uso del método, se propuso un problema donde los valores aparecían dados en forma tabular. A partir de un análisis geométrico de la primera derivada en relación con la tangente del ángulo, los diferentes grupos de trabajo lograron reemplazar la derivada por una interpolación lineal, es decir, utilizando el hecho de que:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$

El segundo método, bisección, se basa en el teorema del valor intermedio y parte del supuesto que en el intervalo $[x_i,x_{i+1}]$, $f(x_i)$ y $f(x_{i+1})$ tienen signos opuestos. Aunque el procedimiento funciona

bien para el caso en el que existe más de una solución en el intervalo total [a,b], se considera por simplicidad que es única la raíz en dicho intervalo.
Básicamente, el método plantea una iteración que consiste en dividir a la mitad repetidamente los subintervalos de [a,b] y en cada paso, localizar la mitad que contiene a la solución, *m*.

Al aplicar el método de bisección en la resolución del problema original propuesto, los alumnos descubrieron sus más importantes inconvenientes: no es aplicable si la función no cambia de signo y además es muy lento en su convergencia, n tiene que ser muy grande para que $|m-m_n|$ sea pequeño.

Finalmente se propuso la aplicación del algoritmo de separación de raíces, el cual consiste en elegir un intervalo del dominio dentro del cual se encuentre la raíz a partir de un análisis geométrico desde la gráfica de la función, dividir al mismo en *n* partes iguales, calcular los valores que toma la función en los bordes de cada una de las divisiones. En aquellos subintervalos donde se produzca un cambio de signo de los valores que toma la función, se encuentra una raíz. Es por ello que como valor representativo de ésta se toma el promedio de los extremos del subintervalo. Por otra parte, cuando más fina sea la partición, se logrará una mejor aproximación al valor numérico de la raíz.

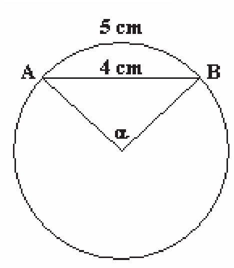
La utilización del mismo en los diferentes problemas propuestos permitió a los alumnos concluir que la principal ventaja que presenta este método con respecto al de la bisección es la facilidad en su programación y la localización de todas las raíces en el intervalo considerado, sin embargo su convergencia es muy lenta y al igual que el método anterior se requiere un cambio de signo de la función.
Creemos que, respecto del método de Newton, tiene la bondad de poderse aplicar y explica en cualquier nivel educativo, dado que el teorema del valor intermedio es abordable, aunque intuitivamente en niveles de escolaridad no universitaria.

Con el propósito de que los alumnos pudieran indagar sobre las bondades y debilidades de cada uno de los métodos al trabajar sobre ecuaciones no algebraicas y sobre todo en los casos de no convergencia, cada grupo debió trabajar sobre las siguientes propuestas:

Actividad 1

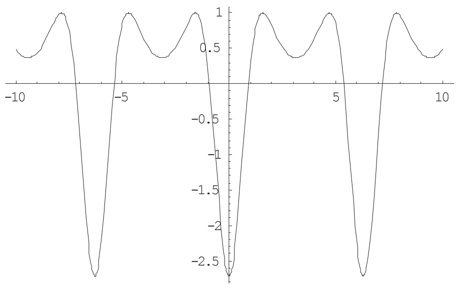
En la figura 2, la longitud de la cuerda AB es de 4 cm. y la del arco AB es de 5 cm.
a) Encuentre el ángulo central α, en radianes, correcto hasta cuatro cifras decimales.
b) ¿De que manera incide la selección del intervalo?
c) ¿De qué manera incide la selección del valor inicial en el método de Newton?,

Figura 2



Actividad 2

Se presenta la gráfica de la curva $y = e^{\cos(x)}$



a) ¿Cuáles de los métodos disponibles permiten determinar las coordenadas de los puntos de inflexión correctas hasta cuatro decimales, en el intervalo considerado?
b) Explicite que dificultades ha encontrado al utilizar cada uno de los métodos.
c) ¿De que manera incide la selección del intervalo?

Actividad 3

¿Qué problema presenta cada uno de los métodos propuestos para calcular los ceros de $f(x) = \sqrt[3]{x}$?

Conclusiones

Las interacciones entre los diferentes grupos y con el docente que guió la experiencia por una parte, y las producciones escritas de los alumnos, por la otra, nos han permitido obtener las siguientes conclusiones que tal vez puedan generalizarse a otros ámbitos educativos de características similares.

La utilización del ordenador como recurso didáctico en la resolución de problemas:

a) permite al alumno interactuar con objetos matemáticos de forma simple y natural, lo que favorece su autonomía en el aprendizaje, además de tener un mayor acercamiento a la matemática, siéndole ésta más familiar.
b) facilita la representación gráfica y de forma dinámica de los conceptos y procedimientos matemáticos. En este sentido, decimos que agiliza el cambio entre diferentes sistemas de representación.
c) facilita la construcción de objetos matemáticos, conjeturar hipótesis, comprobar propiedades, simular y descubrir regularidades.
d) permite ampliar el abanico de ejemplificaciones y se minimizan los cálculos tediosos. (Hernández Fernández, Delgado Rubí y Fernández de Alaíza, 1998).
e) facilita el tratamiento de muchos temas sin exigir al alumno grandes conocimientos matemáticos favoreciendo una metodología en la que participen de forma activa en su aprendizaje.
f) permite combinar los datos de forma numérica, simbólica y gráfica, tratando a las matemáticas de manera global.

De manera más general creemos que:

- El uso del ordenador no deshumaniza el proceso de enseñanza aprendizaje, siempre y cuando el alumno sea guiado por el profesor correctamente, y reciba un seguimiento por parte del docente sobre sus trabajos. (Jiménez, 1992)
- La comunicación usuario-ordenador no permite utilizar el lenguaje natural. Las respuestas de los alumnos se dan, generalmente, mediante elección múltiple, palabras y frases cortas y es el docente quien debe guiar al alumno en la construcción de sus justificaciones. (Alonso, 1992)
- Es importante que el alumno tenga clara cual es la finalidad de su utilización. Creemos que constituye una experiencia muy enriquecedora tanto para el docente como para el alumno, pero es importante que no se utilice el ordenador como fin único.
- Permite evaluar en forma continua el desempeño del alumno a través de sus producciones.

Referencias bibliográficas

Alonso, J.(1992). *Motivar en la adolescencia: Teoría, evaluación e intervención.* Madrid, España: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

Hernández Fernández, H.; Delgado Rubí, J. R, y Fernández de Alaíza, B. (1998). *Cuestiones de didáctica de la Matemática. Conceptos y Procedimientos en la Educación Polimodal y Superior*. Buenos Aires, Argentina: Homo Sapiens Ediciones.

Jiménez, J.A.(1992).*Una propuesta de introducción de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones en la enseñanza.* En J. Pablos y C. Gortari (Eds.). *Las nuevas tecnologías de la información en la educación.* (pp158-177). Madrid, España:Alfar.

Torres L., P. (1997) *Influencias de la computación en la enseñanza de la matemática.* Tesis en opción al grado científico de doctor en ciencias no publicada. Sancti Spíritus.

Torres L., P. (2001) Didáctica de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación. *Pedagogía - Curso 40.*